A döntéselmélet matematikai alapjai

Bevezetés a döntéselméletbe

□ alapfeladat:
Ki kell választani egy (vagy több) alternatívát a lehetséges alternatívák halmazából, figyelembe véve, hogy minden választásnak "következménye" van.

□ döntési elv:

- gazdasági (pl. nyereség/veszteség számítás)
- nem gazdasági (pl. attidüt alapú)

□ döntéselméleti problémák ill. feladatok csoportosításai:

egyéni (pl. vásárlás)
csoportos (pl. bizottság, szervezet, populáció)

biztos ismeretekre alapozó döntés
bizonytalanságban hozott döntés
kockázat melletti döntés

leíró jellegű
normatív
tanácsadó

Kifizetési táblázat

```
payoff = {{K11, K12, K13}, {K21, K22, K23}, {K31, K32, K33}, {K41, K42, K43}};
```

```
TableForm[payoff,
 TableHeadings -> {{"D1", "D2", "D3", "D4"}, {"S1", "S2", "S3"}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	S1	S2	S3
D1	K_{11}	K_{12}	K_{13}
D2	K_{21}	K_{22}	K_{23}
D3	K_{31}	K_{32}	K_{33}
D4	K_{41}	K_{42}	K_{43}

```
TableForm[payoff,
  TableHeadings -> {{"D1", "D2", "D3", "D4"}, {"S1", "S2", "S3"}},
  TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right] /.
 payoff → {{2, 5, -1}, {4, -2, 7}, {7, 8, -1}, {10, -3, 5}}
```

	S1	S2	S3
D1	2	5	-1
D2	4	-2	7
D3	7	8	-1
D4	10	-3	5

```
D1 = "arany";
D2 = "civil ipar";
D3 = "olaj";
D4 = "informatika";
S1 = "béke";
S2 = "háború";
S3 = "terrorizmus";
payoff = {arany, ipar, olaj, informatika} =
   {{1, 5, 2}, {5, -2, -1}, {3, 8, -4}, {6, 3, 2}};
{beke, haboru, terrorizmus} = Transpose[payoff];
```

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
Min[payoff]
```

-4

```
Max[payoff]
```

8

```
legkisebb = {Min[arany], Min[ipar], Min[olaj], Min[informatika]}
```

{1, -2, -4, 2}

```
Max[legkisebb]
```

```
2
```

A döntéshozás kritériumai

◆ Biztos ismeretek mellett hozott döntés (optimalizálás)

Lineáris programozási megoldások

- Grafikus megoldások

- Numerikus megoldások

◆ Bizonytalanságban hozott döntés

Maximin kritérium (Wald, 1950)

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
befektetesMin = {{D1, Min[arany]},
  {D2, Min[ipar]}, {D3, Min[olaj]}, {D4, Min[informatika]}}
```

```
{{arany, 1}, {civil ipar, -2}, {olaj, -4}, {informatika, 2}}
```

```
MaxPair[pairs_List] := Select[rendezett = Sort[pairs, #1[[2]] ≥ #2[[2]] &],
  First[rendezett][[2]] == #[[2]] &]
```

```
MaxPair[befektetesMin]
```

```
{{informatika, 2}}
```

Minimax kritérium

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
befektetesMax = {{D1, Max[arany]},
  {D2, Max[ipar]}, {D3, Max[olaj]}, {D4, Max[informatika]}}
```

```
{{arany, 5}, {civil ipar, 5}, {olaj, 8}, {informatika, 6}}
```

```
MinPair[pairs_List] := Select[rendezett = Sort[pairs, #1[[2]] ≤ #2[[2]] &],
  First[rendezett][[2]] == #[[2]] &]
```

```
MinPair[befektetesMax]
```

```
{{arany, 5}, {civil ipar, 5}}
```

Minimax megbánás kritérium (Savage, 1951)

megbánás $r_{ij} = \underset{i}{\text{maximum}}\, K_{ij} - K_{ij}$ S_j bekövetkezése esetén a maximális kifizetés és az aktuális választáshoz tartozó kifizetés különbsége

a megbánás "veszteségként" értendő, így Minimax-ot érdemes alkalmazni r_{ij}-re

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
beke
Max[beke]
rbeke = Max[beke] - beke
```

```
{1, 5, 3, 6}
```

```
6
```

```
{5, 1, 3, 0}
```

```
{rbeke, rhaboru, rterrorizmus} =
  {Max[beke] - beke, Max[haboru] - haboru, Max[terrorizmus] - terrorizmus};
```

```
rpayoff = {rarany, ripar, rolaj, rinformatika} =
   Transpose[{rbeke, rhaboru, rterrorizmus}];
```

```
TableForm[rpayoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	5	3	0
civil ipar	1	10	3
olaj	3	0	6
informatika	0	5	0

```
megbanasMax = {{D1, Max[rarany]},
  {D2, Max[ripar]}, {D3, Max[rolaj]}, {D4, Max[rinformatika]}}
```

```
{{arany, 5}, {civil ipar, 10}, {olaj, 6}, {informatika, 5}}
```

```
MinPair[megbanasMax]
```

```
{{arany, 5}, {informatika, 5}}
```

Maximax kritérium

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
befektetesMax = {{D1, Max[arany]},
  {D2, Max[ipar]}, {D3, Max[olaj]}, {D4, Max[informatika]}}
```

```
{{arany, 5}, {civil ipar, 5}, {olaj, 8}, {informatika, 6}}
```

```
MaxPair[befektetesMax]
```

```
{{olaj, 8}}
```

Nem elégséges ok kritérium (Laplace, 1825)

Ha nincs "ok", akkor minden esemény bekövetkezésének valószínűsége egyenlő, így a "legjobb" választási alternatíva az, amelyiknek az átlagos nyeresége a legnagyobb

```
atlag[x_List] := Apply[Plus, x] / Length[x]
```

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
befektetesAtlag = {{D1, atlag[arany]},
  {D2, atlag[ipar]}, {D3, atlag[olaj]}, {D4, atlag[informatika]}}
```

$\{\{\text{arany}, \frac{8}{3}\}, \{\text{civil ipar}, \frac{2}{3}\}, \{\text{olaj}, \frac{7}{3}\}, \{\text{informatika}, \frac{11}{3}\}\}$

```
befektetesAtlag = {{D1, atlag[arany]}, {D2, atlag[ipar]},
   {D3, atlag[olaj]}, {D4, atlag[informatika]}} // N
```

```
{{arany, 2.66667}, {civil ipar, 0.666667},
 {olaj, 2.33333}, {informatika, 3.66667}}
```

```
MaxPair[befektetesAtlag]
```

```
{{informatika, 3.66667}}
```

Optimizmus-pesszimizmus index (Hurwicz, 1951)

A Maximin (pesszimista) és a Maximax (optimista) attitüd túlságosan szélsőséges, az emberek attitüdje ezen két szélsőséges attitüd közé esik. Az optimista-pesszimista index minden lehetséges alternatíva estén súlyozza (egy egyénre jellemző   súllyal) a minimális és maximális nyereség kifizetési értékét és azt az alternatívát választja, amelynél ez a legnagyobb.

```
TableForm[payoff, TableHeadings -> {{D1, D2, D3, D4}, {S1, S2, S3}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	béke	háború	terrorizmus
arany	1	5	2
civil ipar	5	-2	-1
olaj	3	8	-4
informatika	6	3	2

```
befektetesMin = {{D1, Min[arany]},
  {D2, Min[ipar]}, {D3, Min[olaj]}, {D4, Min[informatika]}}
```

```
{{arany, 1}, {civil ipar, -2}, {olaj, -4}, {informatika, 2}}
```

```
befektetesMax = {{D1, Max[arany]},
   {D2, Max[ipar]}, {D3, Max[olaj]}, {D4, Max[informatika]}}
```

```
{{arany, 5}, {civil ipar, 5}, {olaj, 8}, {informatika, 6}}
```

a pesszimizmus "foka"

```
α * Transpose[befektetesMin][[2]]
```

```
{α, -2 α, -4 α, 2 α}
```

```
(1 - α) * Transpose[befektetesMax][[2]]
```

```
{5 (1 - α), 5 (1 - α), 8 (1 - α), 6 (1 - α)}
```

```
opAlfa =
  α * Transpose[befektetesMin][[2]] + (1 - α) * Transpose[befektetesMax][[2]]
```

```
{5 (1 - α) + α, 5 (1 - α) - 2 α, 8 (1 - α) - 4 α, 6 (1 - α) + 2 α}
```

```
befektetesAlfa = {{D1, opAlfa[[1]]},
   {D2, opAlfa[[2]]}, {D3, opAlfa[[3]]}, {D4, opAlfa[[4]]}}
```

```
{{arany, 5 (1 - α) + α}, {civil ipar, 5 (1 - α) - 2 α},
 {olaj, 8 (1 - α) - 4 α}, {informatika, 6 (1 - α) + 2 α}}
```

```
MatrixForm[Table[{"ha  α =", α, "  akkor a legjobb választás  →  ",
    MaxPair[befektetesAlfa]} , {α, 0.0, 1.0, 0.1}]]
```

ha α =	0.	akkor a legjobb választás →	{{olaj, 8.}}
ha α =	0.1	akkor a legjobb választás →	{{olaj, 6.8}}
ha α =	0.2	akkor a legjobb választás →	{{olaj, 5.6}}
ha α =	0.3	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 4.8}}
ha α =	0.4	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 4.4}}
ha α =	0.5	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 4.}}
ha α =	0.6	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 3.6}}
ha α =	0.7	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 3.2}}
ha α =	0.8	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 2.8}}
ha α =	0.9	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 2.4}}
ha α =	1.	akkor a legjobb választás →	{{informatika, 2.}}

Az kísérletes meghatározása (a személyre jellemző, független a helyzettől):

```
TableForm[{{1, 0, "|", 0, 1, (1 - α)}, {x, x, "|", x, x, x}},
 TableHeadings -> {{A1, A2}, {E1, E2, "|", min, max, α * min + (1 - α) * max}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	E1	E2	|	min	max	max (1 − α) + min α
A1	1	0	|	0	1	1 − α
A2	x	x	|	x	x	x

Ha a kísérleti személy indifferens az A1 és A2 választásában, akkor (1-) = x, tehát = 1-x

Példa (Milner, 1954)

```
payoff =
  {D1, D2, D3, D4} = {{2, 2, 0, 1}, {1, 1, 1, 1}, {0, 4, 0, 0}, {1, 3, 0, 0}};
{S1, S2, S3, S4} = Transpose[payoff];
```

```
TableForm[payoff,
 TableHeadings -> {{"D1", "D2", "D3", "D4"}, {"S1", "S2", "S3", "S4"}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	S1	S2	S3	S4
D1	2	2	0	1
D2	1	1	1	1
D3	0	4	0	0
D4	1	3	0	0

```
sormin = {{"D1", Min[D1]}, {"D2", Min[D2]}, {"D3", Min[D3]}, {"D4", Min[D4]}}
```

```
{{D1, 0}, {D2, 1}, {D3, 0}, {D4, 0}}
```

```
sormax = {{"D1", Max[D1]}, {"D2", Max[D2]}, {"D3", Max[D3]}, {"D4", Max[D4]}}
```

```
{{D1, 2}, {D2, 1}, {D3, 4}, {D4, 3}}
```

Minimax (Wald)

```
MaxPair[sormin]
```

```
{{D2, 1}}
```

maximin

```
MinPair[sormax]
```

```
{{D2, 1}}
```

Minimax megbánás (Savage)

```
{rS1, rS2, rS3, rS4} = {Max[S1] - S1, Max[S2] - S2, Max[S3] - S3, Max[S4] - S4}
```

```
{{0, 1, 2, 1}, {2, 3, 0, 1}, {1, 0, 1, 1}, {0, 0, 1, 1}}
```

```
rpayoff = {rD1, rD2, rD3, rD4} = Transpose[{rS1, rS2, rS3, rS4}]
```

```
{{0, 2, 1, 0}, {1, 3, 0, 0}, {2, 0, 1, 1}, {1, 1, 1, 1}}
```

```
TableForm[rpayoff,
 TableHeadings -> {{"D1", "D2", "D3", "D4"}, {"S1", "S2", "S3", "S4"}},
 TableSpacing -> {2, 2}, TableAlignments → Right]
```

	S1	S2	S3	S4
D1	0	2	1	0
D2	1	3	0	0
D3	2	0	1	1
D4	1	1	1	1

```
megbanasMax =
 {{"D1", Max[rD1]}, {"D2", Max[rD2]}, {"D3", Max[rD3]}, {"D4", Max[rD4]}}
```

```
{{D1, 2}, {D2, 3}, {D3, 2}, {D4, 1}}
```

```
MinPair[megbanasMax]
```

```
{{D4, 1}}
```

Nem elégséges ok (Laplace)

```
sorAtlag = {{"D1", atlag[D1]},
   {"D2", atlag[D2]}, {"D3", atlag[D3]}, {"D4", atlag[D4]}} // N
```

```
{{D1, 1.25}, {D2, 1.}, {D3, 1.}, {D4, 1.}}
```

```
MaxPair[sorAtlag]
```

```
{{D1, 1.25}}
```

Optimizmus-pesszimizmus (Hurwitz)

```
opAlfa = α * Transpose[sormin][[2]] + (1 - α) * Transpose[sormax][[2]]
```

```
{2 (1 - α), 1, 4 (1 - α), 3 (1 - α)}
```

```
sorAlfa = {{"D1", opAlfa[[1]]},
  {"D2", opAlfa[[2]]}, {"D3", opAlfa[[3]]}, {"D4", opAlfa[[4]]}}
```

```
{{D1, 2 (1 - α)}, {D2, 1}, {D3, 4 (1 - α)}, {D4, 3 (1 - α)}}
```

```
MatrixForm[Table[{"ha  α =", α, "  akkor a legjobb választás  →  ",
   MaxPair[sorAlfa]} , {α, 0.0, 1.0, 0.1}]]
```

ha	α =	0.	akkor a legjobb választás →	{{D3, 4.}}
ha	α =	0.1	akkor a legjobb választás →	{{D3, 3.6}}
ha	α =	0.2	akkor a legjobb választás →	{{D3, 3.2}}
ha	α =	0.3	akkor a legjobb választás →	{{D3, 2.8}}
ha	α =	0.4	akkor a legjobb választás →	{{D3, 2.4}}
ha	α =	0.5	akkor a legjobb választás →	{{D3, 2.}}
ha	α =	0.6	akkor a legjobb választás →	{{D3, 1.6}}
ha	α =	0.7	akkor a legjobb választás →	{{D3, 1.2}}
ha	α =	0.8	akkor a legjobb választás →	{{D2, 1}}
ha	α =	0.9	akkor a legjobb választás →	{{D2, 1}}
ha	α =	1.	akkor a legjobb választás →	{{D2, 1}}

```
MaxPair[sorAlfa /. α → 0.75]
```

```
{{D2, 1}, {D3, 1.}}
```

Ha (0,1), akkor 4(1-)>2(1-) és hasonlóan 4(1-)>3(1-), így a kérdés, hogy milyen esetén igaz, hogy 4(1-)>1.

A megoldás:

ha <3/4, akkor 4(1-)>1, azaz a döntés D3

ha >3/4, akkor 4(1-)<1, azaz a döntés D2

ha =3/4, akkor a döntés D2 vagy D3

Megfigyelt "különös" döntési mechanizmusok (valószínűségek becslése)

- Az emberek intuitív értékelései gyakran szisztematikusan eltérnek a Bayes-elvtől
- Az emberek gyakran túlértékelik a "konkrét" adatokat
- Az embereknek általában hibás elképzelésük van a "véletlenről"
- Az emberek túlságosan a saját tapasztalatukra támaszkodnak
- Az emberek sokszor kiválasztanak egy információt és ahhoz ragaszkodnak, ahhoz igazítják értékelésüket
- Az emberek gyakran túlértékelik saját "képességüket" bizonytalan események "bejóslására"

◆ Kockázat melletti döntés

Várható nyereség kritérium

- Teljes információ ismeretében
- Nem teljes információ ismeretében (Bayes-féle döntés)

Várható megbánás kritérium