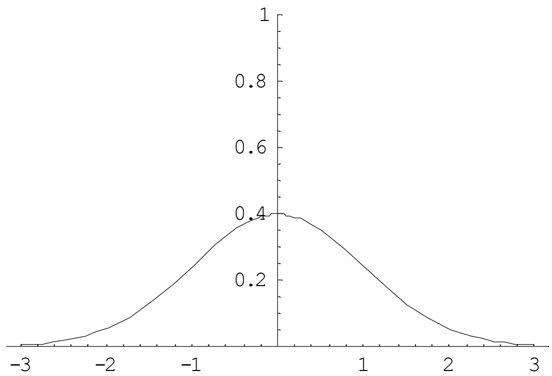
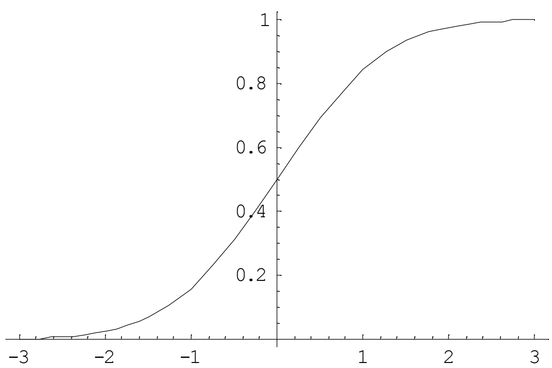
Thurstone-féle modell

Normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$



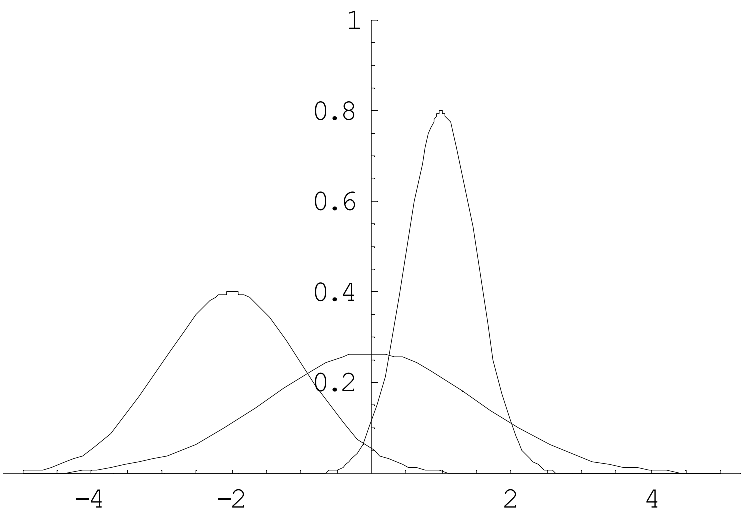


sűrűségfüggvény

eloszlásfüggvény: $F(x) = P(X < x)$

$F(-x)=1-F(x)$

$F(x)=1-F(-x)$



Tulajdonságok:

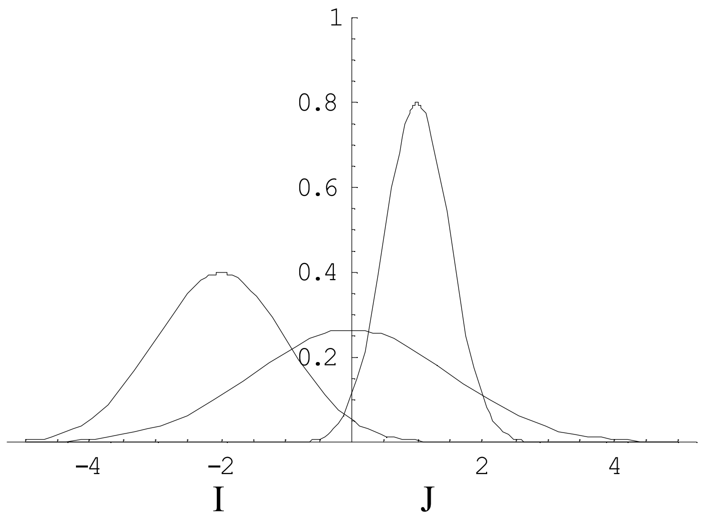
1. Ha I és J független normális eloszlású,

akkor D = J – I is normális eloszlású

ha a várható értékeik: mi és mj, akkor D várható értéke = mj – mi

ha szórásuk egyenlő σ-val, akkor D szórása $\sqrt{2}\sigma$

ha szórásaik σi és σj, akkor D szórása $\sqrt{\sigma i^2 + \sigma j^2}$



2. Az I, J ingert egy-egy valószínűségi eloszlással (valószínűségi változóval) azonosítunk.

3. Az I és J inger összehasonlításakor annak a valószínűségét keressük, hogy a J-t nagyobbnak érzékeljük I-nél, azaz

$$P(J > I) = P(J - I > 0)$$

4. A különbséget D-vel, a D várható értékét md-vel, szórását σd–vel jelöljük, akkor

$$D = J - I \quad \text{és}$$

$$P(J > I) = P(D > 0) = P(D - md > 0 - md) = P\left(\frac{D - md}{\sigma d} > \frac{0 - md}{\sigma d}\right)$$

5. De a

$$Z = \frac{D - md}{\sigma d}$$

standardizált normális eloszlású és

P(J > I) =

$$P\left(Z > \frac{0 - md}{\sigma d}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{-md}{\sigma d}\right) = 1 - F\left(\frac{-md}{\sigma d}\right) = F\left(\frac{md}{\sigma d}\right)$$

Z	p	Z	p	Z	p
-2.32635	0.01	-0.412463	0.34	0.439913	0.67
-2.05375	0.02	-0.38532	0.35	0.467699	0.68
-1.88079	0.03	-0.358459	0.36	0.49585	0.69
-1.75069	0.04	-0.331853	0.37	0.524401	0.7
-1.64485	0.05	-0.305481	0.38	0.553385	0.71
-1.55477	0.06	-0.279319	0.39	0.582842	0.72
-1.47579	0.07	-0.253347	0.4	0.612813	0.73
-1.40507	0.08	-0.227545	0.41	0.643345	0.74
-1.34076	0.09	-0.201893	0.42	0.67449	0.75
-1.28155	0.1	-0.176374	0.43	0.706303	0.76
-1.22653	0.11	-0.150969	0.44	0.738847	0.77
-1.17499	0.12	-0.125661	0.45	0.772193	0.78
-1.12639	0.13	-0.100434	0.46	0.806421	0.79
-1.08032	0.14	-0.0752699	0.47	0.841621	0.8
-1.03643	0.15	-0.0501536	0.48	0.877896	0.81
-0.994458	0.16	-0.0250689	0.49	0.915365	0.82
-0.954165	0.17	0.	0.5	0.954165	0.83
-0.915365	0.18	0.0250689	0.51	0.994458	0.84
-0.877896	0.19	0.0501536	0.52	1.03643	0.85
-0.841621	0.2	0.0752699	0.53	1.08032	0.86
-0.806421	0.21	0.100434	0.54	1.12639	0.87
-0.772193	0.22	0.125661	0.55	1.17499	0.88
-0.738847	0.23	0.150969	0.56	1.22653	0.89
-0.706303	0.24	0.176374	0.57	1.28155	0.9
-0.67449	0.25	0.201893	0.58	1.34076	0.91
-0.643345	0.26	0.227545	0.59	1.40507	0.92
-0.612813	0.27	0.253347	0.6	1.47579	0.93
-0.582842	0.28	0.279319	0.61	1.55477	0.94
-0.553385	0.29	0.305481	0.62	1.64485	0.95
-0.524401	0.3	0.331853	0.63	1.75069	0.96
-0.49585	0.31	0.358459	0.64	1.88079	0.97
-0.467699	0.32	0.38532	0.65	2.05375	0.98
-0.439913	0.33	0.412463	0.66	2.32635	0.99

6. Példa

A sorok preferencia valószínűségei az oszlopokkal szemben, azaz

$$P(\text{sorok} > \text{oszlopok})$$

alternatívák	A	B	C	D	E
A	--	0.60	0.65	0.75	0.85
B	0.40	--	0.60	0.65	0.65
C	0.35	0.40	--	0.70	0.70
D	0.25	0.35	0.30	--	0.60
E	0.15	0.35	0.30	0.40	--

A standardizált Z értékek, vagyis a sorok és oszlopok várható értékeinek különbségei (a várható értékek jelentik a skála értékeket, azaz az ingerek pozícióit):

$$mi - mj$$

alternatívák	A	B	C	D	E
A	0	0.25	0.39	0.67	1.04
B	-0.25	0	0.25	0.39	0.39
C	-0.39	-0.25	0	0.52	0.52
D	-0.67	-0.39	-0.52	0	0.25
E	-1.04	-0.39	-0.52	-0.25	0

alternatívák	A	B	C	D	E
A	0	ma-mb	ma-mc	ma-md	ma-me
B	mb-ma	0	mb-mc	mb-md	mb-me
C	mc-ma	mc-mb	0	mc-md	mc-me
D	md-ma	md-mb	md-mc	0	md-me
E	me-ma	me-mb	me-mc	mc-md	0

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy :

$$ma+mb+mc+md+me = 0$$

Ekkor a sorösszegek rendre: 5*ma, 5*mb, 5*mc, 5*md, 5*me

(pl. első sor:
ma-mb+ma-mc+ma-md+ma-me+ ma-ma =
= 5*ma-(ma+mb+mc+md+me) =
= 5*ma)

Ezért, a Z értékek sorösszegeit átlagolva egy jó becslést kaphatunk az ingerek átlagos értékeire, azaz a skálán elfoglalt pozícióikra.

A példában az átlagok rendre:

ma = 0.47, mb = 0.16, mc = 0.08, md = -0.27, me = -0.44

A skála:
------------------------------------0--------------------------------
me md mc mb ma

A skálán mért távolságok:

alternatívák	A	B	C	D	E
A	0	0.31	0.39	0.74	0.91
B	-0.31	0	0.08	0.43	0.60
C	-0.39	-0.08	0	0.35	0.52
D	-0.74	-0.43	-0.35	0	0.17
E	-0.91	-0.60	-0.52	-0.17	0

a visszakeresett valószínűségek:

alternatívák	A	B	C	D	E
A	--	0.62	0.65	0.77	0.82
B	0.38	--	0.53	0.67	0.73
C	0.35	0.47	--	0.64	0.70
D	0.23	0.33	0.36	--	0.57
E	0.18	0.27	0.30	0.43	--

az eredeti valószínűségek:

alternatívák	A	B	C	D	E
A	--	0.60	0.65	0.75	0.85
B	0.40	--	0.60	0.65	0.65
C	0.35	0.40	--	0.70	0.70
D	0.25	0.35	0.30	--	0.60
E	0.15	0.35	0.30	0.40	--

az eltérés:

$$stress = \sqrt{\frac{\sum_{i,j}\left(p_{ij} - \hat{p}_{ij}\right)^2}{\sum_{i,j} p_{ij}^2}}$$

most a stress = 0.08

0%: tökéletes, 0-5%: kiváló, 5-10%: jó, 10-20%:elfogadható, 20-%--: nincs illeszkedés