

Matematikai alapok és valószínűségszámítás

Teljes eseményrendszer
Bayes tétel

Teljes eseményrendszer

Amennyiben A_1, A_2, \dots, A_n egymást kölcsönösen kizáró események, és együttesen kiadják a biztos eseményt, akkor teljes eseményrendszerrel beszélünk.

Formalizálva:

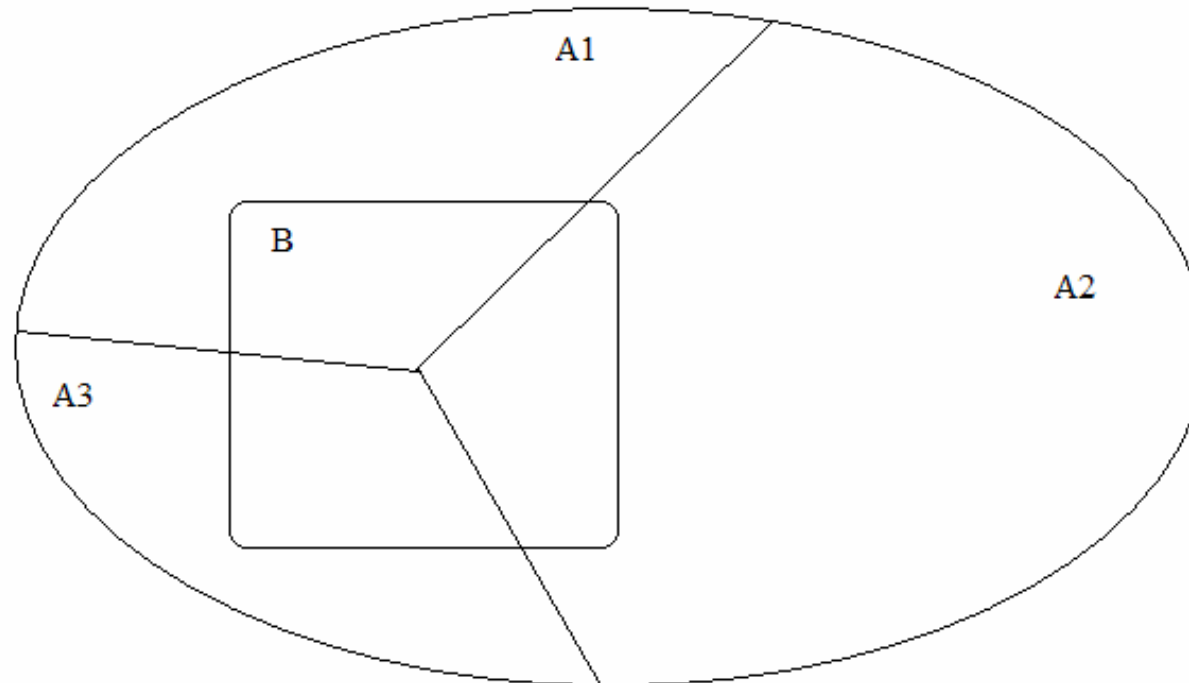
Adott események egy halmaza $\{A_i\}$ ($i = 1, \dots, n$)

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ minden esetben ha } i \neq j$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

A teljes valószínűség tétele

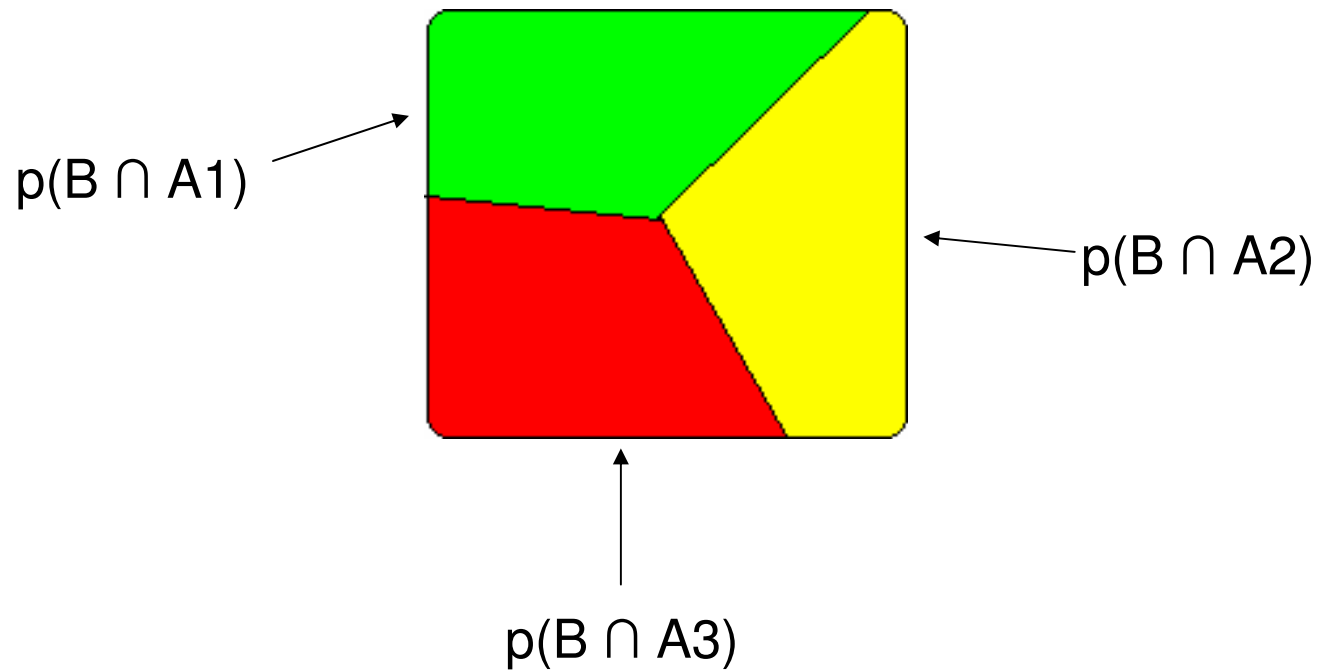
Adott egy B esemény és az A_1, A_2, A_3 teljes eseményrendszer.



A teljes valószínűség tétele

? Hogyan fejezhetjük ki a B esemény valószínűségét B esemény A1, A2, A3 eseményekre vonatkozó feltételes valószínűségeinek segítségével?

$$p(B) = ?$$



A teljes valószínűség tétele

$$p(B) = p(B \cap A1) + p(B \cap A2) + p(B \cap A3)$$

$$p(B \cap A1) = p(B | A1) * p(A1)$$

$$p(B \cap A2) = p(B | A2) * p(A2)$$

$$p(B \cap A3) = p(B | A3) * p(A3)$$

Tehát B esemény valószínűsége B esemény A1, A2, A3 eseményekre vonatkozó feltételes valószínűségeinek segítségével kifejezve:

$$p(B) = p(B | A1) * p(A1) + p(B | A2) * p(A2) + p(B | A3) * p(A3)$$

Ez a *teljes valószínűség tétele*.

A Bayes tétel

Legyen ismét adott egy B esemény és az A1, A2, A3 teljes eseményrendszer. Ez esetben azonban nem a B esemény valószínűségét szeretnénk kifejezni B esemény A1, A2, A3 eseményekre vonatkozó feltételes valószínűségeinek segítségével, hanem A1, A2, A3 események B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét szeretnénk kifejezni B esemény A1, A2, A3 eseményekre vonatkozó feltételes valószínűségeinek segítségével.

$$p(A1 | B) = ?$$

$$p(A2 | B) = ?$$

$$p(A3 | B) = ?$$

A Bayes tétel

$$p(A1 | B) = p(A1 \cap B) / p(B)$$

A teljes valószínűség tételéből következően:

$$p(B) = p(B | A1) * p(A1) + p(B | A2) * p(A2) + p(B | A3) * p(A3)$$

és:

$$p(A1 \cap B) = p(B | A1) * p(A1)$$

Tehát:

$$p(A1 | B) = \frac{p(B | A1) * p(A1)}{p(B | A1) * p(A1) + p(B | A2) * p(A2) + p(B | A3) * p(A3)}$$

Ez a **Bayes tétel**.