Matematikai alapok és valószínűségszámítás

Statisztikai hipotézisvizsgálat

Hipotézisvizsgálat

A tudományos vizsgálódások során központi szerepet játszik a statisztikai hipotézisvizsgálat.

A kutatások, vizsgálatok során általában különböző szakmai kérdésekre szeretnénk választ kapni.

Például.:

- Jobb-e az emlékezeti teljesítmény, ha a felidézést a tanulás kontextusában végezzük, mint ha ettől eltérő a kontextus?
- Van-e kapcsolat a születéskori testsúly és a felnőttkori testsúly között?
- Összefügg-e az IQ és a kreativitás?

Hipotézisek

Bármely szakmai kérdés, probléma esetén a kérdés két, egymással versengő feltevés, hipotézis formájában írható le, az egyik a null hipotézis, a másik az alternatív hipotézis. A két hipotézist nem egyenrangúként kezeljük, hanem a null hipotézis kitüntetett figyelmet kap.

A null hipotézis általában a jelenlegi, eddig nem cáfolt állapotot rögzíti, míg az alternatív hipotézis az új elmélet, feltevés megtestesítője.

Hipotézisek

A hipotézisek gyakran a populációparaméterekre vonatkozó állítások.

Példa:

Kérdés: megegyezik-e a férfiak és nők testmagasságának populációátlaga?

Az egyik hipotézis ebben az esetben az, hogy a férfiak és nők testmagasságának populációátlaga megegyezik, a másik hipotézis pedig, hogy a férfiak és nők testmagasságának populációátlaga eltérő.

Hipotézisek

A ***null hipotézis***, vagy más néven ***konzervatív hipotézis***, $\boldsymbol{H_0}$ tehát kitüntetett szerepet játszik a statisztikai hipotézisvizsgálatban.

Mindaddig, amíg tapasztalataink nem mondanak nagymértékben ellent a null hipotézisnek, addig ehhez ragaszkodunk. Ha azonban a tapasztalataink nagymértékben ellentmondanak a null hipotézisnek, akkor elutasítjuk azt és az ***alternatív hipotézist***, $\boldsymbol{H_1}$-et fogadjuk el, ami jobban megfelel a tapasztalatainknak.

Azt, hogy mit értünk a ‘nagymértékben ellentmond’ kifejezés alatt később definiáljuk.

Hipotézisvizsgálat

A hipotézisvizsgálatra gyakran használt analógia a bűnüldözéssel kapcsolatos.

Tegyük fel, hogy gyilkosságot követnek el, és az esetnek van egy gyanúsítottja. A szakmai kérdés amit vizsgálni kell ebben az esetben, hogy a gyanúsított követte-e el a bűncselekményt.

A null hipotézis ilyen esetekben mindig az, hogy a gyanúsított ártatlan (ártatlanság vélelme) és ezt a null hipotézist mindaddig fenntartjuk, amíg a bizonyítékok (a tapasztalataink) ennek nagymértékben ellent nem mondanak.

Például ha szemtanúk a gyanúsított ellen vallanak, és megtalálják a gyilkos fegyvert a gyanúsított ujjlenyomataival, akkor elmondható, hogy a tapasztaltak nagymértékben ellentmondanak a null hipotézisünknek (a gyanúsított ártatlan).

Statisztikai hipotézisvizsgálat menete

Statisztikai hipotézisvizsgálatok menete gyakorlatilag megegyezik az előző példában leírtakkal, azaz:

- Szakmai kérdést fogalmazunk meg, ez alapján
- Konzervatív és alternatív hipotézist állítunk
- Vizsgálatot végzünk, azaz ‘bizonyítékokat gyűjtünk’
- Megvizsgáljuk, hogy a bizonyítékaink ellent mondanak-e nagymértékben a konzervatív hipotézisnek
  - Ha nem, megtartjuk a konzervatív hipotézist
  - Ha igen, akkor elvetjük a konzervatív hipotézist

Statisztikai hipotézisvizsgálat menete

A statisztikai hipotézisvizsgálatok során a hipotézisek ismeretében a mintából egy ún. próbastatisztikát számolunk, aminek ismert az elméleti eloszlása a konzervatív hipotézis esetén.

A mintából számolt próbastatisztika értéket annak elméleti eloszlásához viszonyítjuk, hogy meghatározzuk, az adott eloszlásban mennyire lenne szélsőséges az adott próbastatisztika érték. Ezt az adott értéknél szélsőségesebb érték bekövetkezési valószínűségével jellemezhetjük.

Minél kisebb az adott eloszlásban a próbastatisztika értékénél extrémebb érték bekövetkezésének valószínűsége, annál inkább ellent mond ez a ‘bizonyíték’ a konzervatív hipotézisnek.

Statisztikai hipotézisvizsgálat menete

Ha a próbastatisztika értéke nagyon extrém az adott eloszlásban, akkor elutasítjuk a konzervatív hipotézist, míg a próbastatisztika kevésbé extrém értéke esetén megtartjuk a konzervatív hipotézist.

Tehát, a próbastatisztika alapján valamilyen döntést hozunk a konzervatív hipotézisünkről.

Ezen döntéshozatalkor hozhatunk helyes döntést, de hibát is elkövethetünk.

Következtetések

Valóság

Döntés	H_0 igaz	H_0 nem igaz
H_0-t megtartjuk	Jogos elfogadás	II. fajú hiba
H_0-t elutasítjuk	I. fajú hiba	Jogos elutasítás

Következtetések

A statisztikai döntéshozatal során tehát kétféle hibát is elkövethetünk, amelyek közül az I. fajú elkövetése a súlyosabb, Ezért a statisztikában az I. fajú hiba elkövetésének valószínűségét maximalizálják.

Az első fajú hiba elkövetésének valószínűséget szignifikancia szintnek nevezzük és α-val jelöljük. Ez tehát a konzervativitási szintünket mutatja, azaz azt, hogy mennyire kell extrémnek lennie a próbastatisztika értékének az elméleti eloszlásához viszonyítva ahhoz, hogy elutasítsuk a konzervatív hipotézist.

A szignifikancia leggyakoribb értéke 0.05, ekkor 5%-os szignifikancia szintről beszélünk.

Előfordul (pl. gyógyszerkísérletek esetén, hogy) az 5%-os szignifikancia szintnél alacsonyabb, pl. 1%-os szignifikancia szintet választanak, azaz még nehezebben utasítják el a konzervatív hipotézist.

Az ***u-próba***

Tegyük fel, hogy az USA-ban van egy jól bevizsgált teszt, aminek ismert az amerikai populációban az eloszlása, a tesztpontszámok normál eloszlást követnek 100-as átlaggal, és 15-ös szórással (N(100,15)).

Ezt a tesztet egy 100 fős reprezentatív magyarországi mintán is felvették. A minta átlaga 103 lett.

Kérdés:

Különbözik-e a tesztpontszámok átlaga a magyar populációban az amerikai populációbeli átlagtól?

Az ***u-próba***

A hipotéziseink ekkor a következők lesznek:

H_0: $\mu_M = 100$

H_1: $\mu_M \neq 100$

Azaz a *konzervatív hipotézisünk* az, hogy a magyar populációban a tesztpontszám átlaga megegyezik az amerikai populáció átlagával, 100-al.

A *alternatív, vagy ellenhipotézisünk* pedig, hogy a magyar populáció átlaga nem egyezik meg 100-al.

Az *u-próba*

Ahhoz, hogy az előző kérdésre választ kaphassunk egy statisztikai próbát kell végrehajtanunk.

Ezt a próbát u-próbának nevezzük, melynek próbastatisztikája a következőképpen írható fel:

$$u = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

Ha visszagondolunk a mintaátlagok elméleti eloszlására, akkor emlékezhetünk, hogy a mintaátlagok átlaga megegyezik az eredeti változó átlagával, szórása pedig az eredeti változó szórásának, és a minta elemszám négyzetgyökének hányadosával.

Az *u-próba*

Az u próbastatisztika gyakorlatilag standardizálásnak felel meg. Tehát az u próbastatisztika elméleti eloszlása standard normál eloszlás lesz:

u ~ N(0,1).

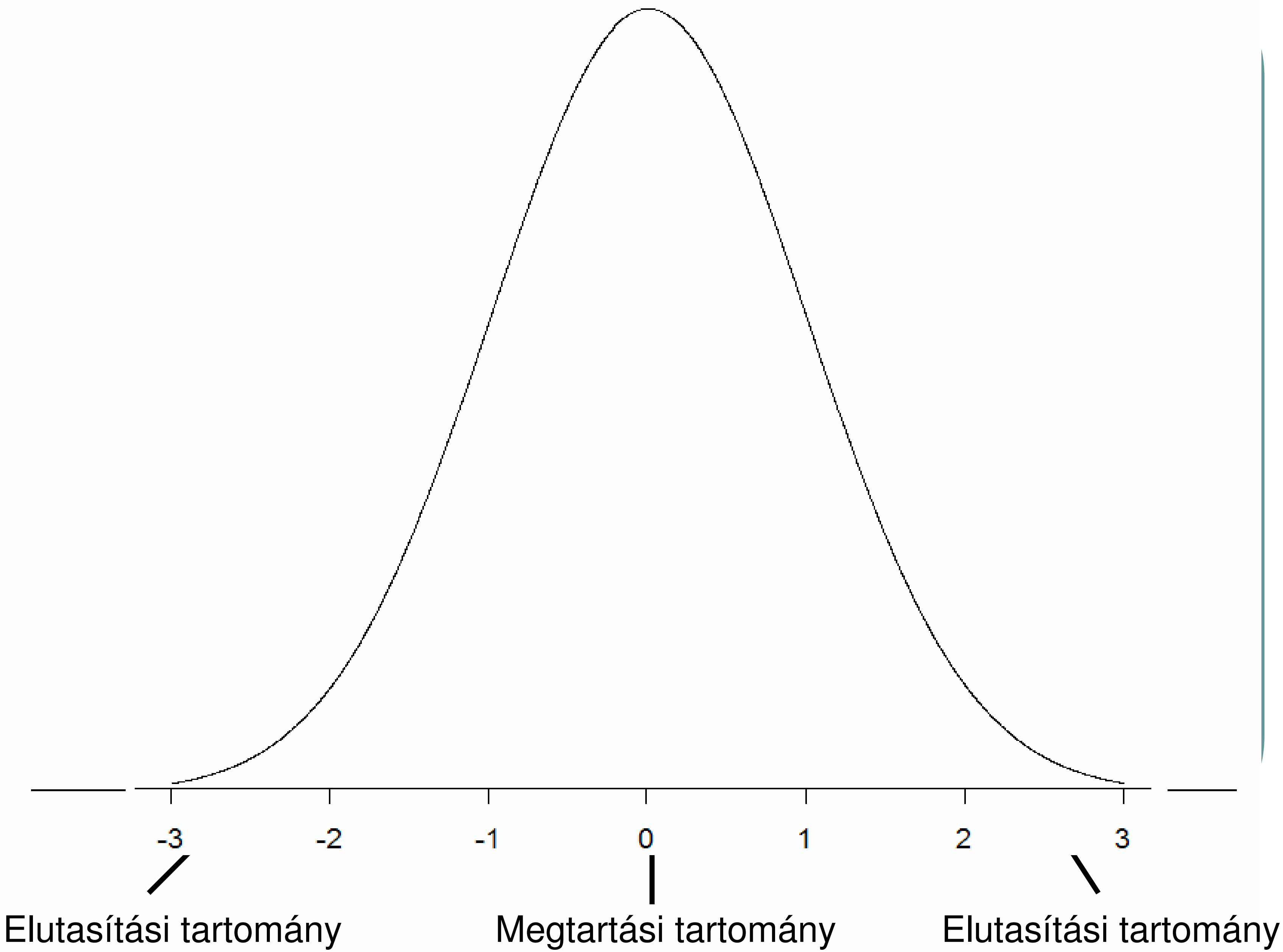
Az előző példában az u próbastatisztika értéke:

$$u = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = \frac{103 - 100}{\frac{15}{\sqrt{100}}} = 2$$

Következő lépésként azt kell megvizsgálnunk, hogy ez a próbastatisztika érték mennyire számít extrémnek egy standard normál eloszlásban, azaz mekkora a valószínűsége ennél extrémebb érték bekövetkezésének.

Az ***u-próba***

2-nél extrémebb érték bekövetkezésének valószínűsége 0.02275, ami kisebb, mint a 0.05-ös szignifikancia szint, ezért a konzervatív hipotézist elutasítjuk, és azt mondjuk, hogy a próbastatisztika értéke 5%-os szinten szignifikáns.



-3
-2
-1
0
1
2
3
Elutasítási tartomány
Megtartási tartomány
Elutasítási tartomány

Ellenhipotézisek

Az alternatív hipotézisekkel kapcsolatban fontos tisztázni, hogy többféle formája lehet. Az előző példában az alternatív hipotézis az volt, hogy a populációátlag nem egyezik meg a feltételezett populációátlaggal. Tehát annál kisebb vagy nagyobb is lehet. Ilyenkor kétoldali ellenhipotézisről beszélünk.

Az alternatív hipotézis lehet egyoldali is, amikor előzetes elképzelés alapján, csak azt vizsgáljuk, hogy pl. a populációátlag nagyobb-e, mint a feltételezett értéke.