Matematikai alapok és valószínűségszámítás

Valószínűségszámítási alapok

Bevezetés

A tudományos életben vizsgálódunk pontosabb megfigyelés, előrejelzés, megértés reményében.

Ha egy kísérletet végzünk, annak többféle eredménye, kimenete lehet , és az, hogy egy adott esetben éppen mi lesz az eredmény, a véletlenen is múlik.

Például, ha kockát dobunk, akkor annak eredménye egy 1 és 6 közé eső egész szám lesz. A dobás éppen aktuális eredménye a véletlenen múlik, hogy egy adott dobás milyen eredményre vezet.

Egy adott kísérlet eredményét az adott kísérlet ***kimenet***ének nevezzük.

Események

Egy adott kísérletnek többféle kimenete lehet.

Egy kísérlet valamennyi lehetséges kimenetét magába foglaló halmazt ***eseménytér***nek nevezzük és ***S***-el jelöljük.

Az eseménytérben különböző eseményeket definiálhatunk. Egy ***esemény*** valamely kísérlet kimeneteinek bármely részhalmaza.

A kísérlet lehetséges kimeneteit ***elemi esemény***eknek is nevezzük.

A különböző események közötti kapcsolatot a halmazelmélet segítségével írhatjuk le.

Események

Tegyük fel, hogy A és B két esemény az S eseménytérből. Ekkor a következő alapvető összefüggéseket definiálhatjuk:

$A \cup B$ (A unió B): A ***vagy*** B esemény bekövetkezik (A és B esemény bármelyike bekövetkezik, A és B esemény közül legalább az egyik bekövetkezik)

$A \cap B$ (A metszet B): A ***és*** B esemény bekövetkezik (A és B események egyidejűleg bekövetkeznek)

$A \subseteq B$ (A esemény B esemény részhalmaza): ha A esemény bekövetkezik, akkor B esemény is bekövetkezik, de fordítva nem feltétlenül igaz

$\overline{A}$ (A esemény komplementere, vagy tagadása) akkor következik be ha A esemény nem következik be

$\varnothing$ (üres halmaz): a lehetetlen esemény

S (a teljes eseménytér): a biztos esemény

Példa

Kísérlet: Kockadobás

Definiáljuk a következő eseményeket:

A: a kísérlet kimenete 4-nél kisebb lesz

B: a kísérlet kimenete páros érték lesz

C: a kísérlet kimenete 7 lesz

Ekkor:

$A \bigcup B$ = {1, 2, 3, 4, 6}

$A \bigcap B$ = {2}

$\overline{A}$ = {4, 5, 6}

C = ø

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Egymást kölcsönösen kizáró események

Egymást kölcsönösen **kizáró (diszjunkt) események**ről akkor beszélünk, ha az egyik esemény bekövetkezése esetén a másik esemény biztosan nem következik be. Tehát, ha adott A és B egymást kölcsönösen kizáró esemény, akkor A esemény bekövetkezése esetén B esemény nem következhet be, és fordítva.

Pl.: kockadobás $A = \{1, 2\}$

$B = \{5, 6\}$

Diszjunkt események metszete mindig üres halmaz.

$A \cap B = \emptyset$

Relatív gyakoriság

Egy adott E esemény relatív gyakoriságán az E esemény bekövetkezéseinek és a kísérletek számának hányadosát értjük.

Ha egy kísérletet számos alkalommal hajtunk végre változatlan feltételek mellett, akkor a relatív gyakoriság egy bizonyos érték körül fog ingadozni.

Ha a kísérletet végtelen sokszor hajtjuk végre, akkor a relatív gyakoriság egy bizonyos értéknél állapodik meg.

A Valószínűség

Egy kísérletet végtelen sokszor végrehajtva meghatározhatjuk egy bizonyos esemény relatív gyakoriságát, amit ebben az esetben már az esemény ***valószínűség***ének nevezünk.

A relatív gyakorisághoz hasonlóan értéke (definíció szerint) 0 és 1 közötti szám lehet.

A valószínűséget ***P***-vel jelöljük, és egy A esemény valószínűségét a fentieknek megfelelően a következőképpen formalizálhatjuk:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{k_A}{n}$$

Ahol k_A az A esemény bekövetkezéseinek száma, n pedig a kísérletek száma.

Az összegzési szabály

Az összegzési szabály segítségével kiszámolható annak a valószínűsége, hogy A vagy B esemény bekövetkezik.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

egymást kizáró események esetén:

$p(A \cap B) = \emptyset$, tehát:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Példa

Tegyük fel, hogy egy pakli francia kártyából 1 lapot húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lap vagy dáma, vagy pedig treff lesz?

p(dáma U treff) = ?

A dáma valószínűsége [p(dáma)]:	4/52
Treff valószínűsége [p(treff)]:	13/52
Treff és dáma valószínűsége [p(dáma ∩ treff]:	1/52

Tehát:

p(dáma U treff) = p(dáma) + P(treff) – p(dáma ∩ treff)

p(dáma U treff) = 4/52 + 13/52 – 1/52

p(dáma U treff) = 16/52

A szorzási szabály

A szorzási szabály segítségével események együttes bekövetkezésének valószínűsége definiálható.

$$p(A \cap B) = p(A|B) * p(B)$$

vagy

$$p(A \cap B) = p(B|A) * p(A)$$

Független események esetén:

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

Független események valószínűsége

Két eseményt függetlennek tekintünk, ha az egyik esemény bekövetkezésének semmilyen hatása nincs a másik esemény bekövetkezésére.

Pl.: Az, hogy a portás ma milyen zoknit vett fel, semmilyen hatással nincs arra, hogy esik-e ma az eső.

Ha két esemény független, akkor nem lehetnek egymást kizáróak, és fordítva.

A valószínűségelméletben két eseményt akkor tekintünk függetlennek, ha együttes bekövetkezésük valószínűsége megegyezik az egyes események bekövetkezése valószínűségének szorzatával.

$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

Példa

Tegyük fel, hogy egy dobozban van 3 kék üveggolyó, 2 piros és 4 sárga. A dobozból kiveszünk egy üveggolyót, feljegyezzük a színét, majd visszatesszük, jól összekeverjük a golyókat, majd még egyszer húzunk. Mi a valószínűsége, hogy egy piros, majd egy kék üveggolyót húzunk?

? $P(\text{piros} \cap \text{kék}) = ?$

$p(\text{piros}) = 2 / 9$

$p(\text{kék}) = 3 / 9$

$P(\text{piros} \cap \text{kék}) = p(\text{piros}) * p(\text{kék}) = (2 / 9) * (3 / 9) = 6 / 81 = .074$

Feltételes valószínűség

A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége, azaz A esemény bekövetkezésének valószínűsége, feltéve, hogy B esemény bekövetkezik: A és B események metszetének valószínűsége osztva B esemény valószínűségével.

$p(A|B) = p(A \cap B) / p(B)$

Példa: Biológia tanár 2 tesztet írat a diákokkal. Annak a valószínűsége, hogy valaki sikeresen teljesít (átmegy) mindkét teszten .25, annak, hogy sikeresen teljesít az első teszten .42.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki átmegy a második teszten, feltéve, hogy átment az első teszten?

Feltételes valószínűség

$p(2.\text{teszt} \mid 1.\text{teszt}) = ?$

$p(2.\text{teszt} \cap 1.\text{teszt}) = .25$

$p(1.\text{teszt}) = .42$

$\underline{p(2.\text{teszt} \mid 1.\text{teszt})} = p(2.\text{teszt} \cap 1.\text{teszt}) / p(1.\text{teszt}) =$

$= .25 / .42 = \underline{.6}$

Feltételes valószínűség

Példa: 500 személy megkérdezésével felmérést végeztek az egyetemi tanulmányok költségeivel kapcsolatban. A megkérdezettek között volt akinek egyetemista gyereke van, és volt olyan is akinek nincs. 3 válaszalternatíva volt: túl soknak ítéli, megfelelőnek ítéli, vagy túl alacsonynak ítéli meg az egyetemi tanulmányok költségét. A válaszok megoszlása a következőképpen alakult:

	túl drága	megfelelő	túl olcsó
Van egyetemista gyerek	30%	13%	1%
Nincs egyetemista gyerek	20%	25%	11%

Feltételes valószínűség

? Feltéve, hogy van egyetemista gyerek a családban, mennyi a valószínűsége, hogy valaki túl drágának találja az egyetemi képzés költségeit?

p(túl drága | van egy. gy.) = ?

p(túl drága ∩ van egy. gy.) = .30

p(van egy. gy.) = .44

p(túl drága | van egy. gy.) =

= p(túl drága ∩ van egy. gy.) / p(van egy. gy.) =

= .30 / .44 = .15 / .22 = .682